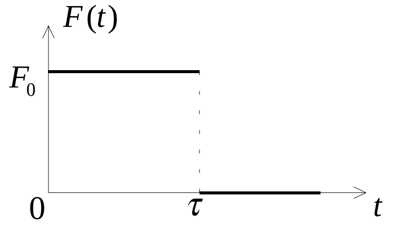
# -EXERCICE 12.6-

## • ENONCE :

« Impulsion initiale d'un oscillateur »

• On considère un point matériel M, de masse m, relié à un point fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur $k$.

• L'ensemble peut coulisser sans frottements le long d'une tige **horizontale** ; la position de M est repérée par son abscisse x, comptée à partir de sa position d'équilibre où le ressort n'est ni allongé, ni contracté.




Le point M étant initialement au repos, on lui applique pendant un temps limité une force $\vec{F} = F(t)\vec{e}_x$ représentée ci-contre.

1) Calculer l'amplitude A du mouvement permanent de M .

2) Quelle valeur minimum faut-il donner à $\tau$ pour « optimiser » le lancement de l'oscillateur, c'est-à-dire que A soit maximum ? Interpréter le résultat.

## • CORRIGE :

« Impulsion initiale d'un oscillateur »

1) En l'absence de frottements, le PFD appliqué au point matériel M, projeté sur l'axe Ox, donne : $m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx + F(t)$, ou : $\boxed{\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = \dfrac{F(t)}{m}}$ avec : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$

• Pour $0 \le t \le \tau$ : $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = \dfrac{F_0}{m} \Rightarrow x(t) = B\cos\omega_0 t + C\sin\omega_0 t + \dfrac{F_0}{m\omega_0^2}$

Or : $x(0) = 0 = B + \dfrac{F_0}{m\omega_0^2} \Rightarrow B = -\dfrac{F_0}{k}$ ; on a aussi : $\dfrac{dx}{dt}(0) = 0 = \omega_0 C \Rightarrow C = 0$ ; on en déduit :

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{k}(1-\cos\omega_0 t) \quad \text{pour} \quad 0 \le t \le \tau} \qquad (1)$$

• Pour $t \ge \tau$ : le mouvement de la masse M est de la forme $x(t') = A\cos(\omega_0 t' + \varphi)$, avec $t' = t - \tau$

$\Rightarrow$ par continuité de l'élongation (qui intervient dans l'expression de **l'énergie** potentielle) et de la vitesse (qui apparaît dans **l'énergie** cinétique) en $t' = 0$, on peut écrire :

$x(t'=0) = A\cos\varphi = x(t=\tau) = \dfrac{F_0}{k}(1-\cos\omega_0\tau)$ et :

$\dfrac{dx}{dt'}(t'=0) = -\omega_0 A\sin\varphi = \dfrac{dx}{dt}(t=\tau) = \dfrac{F_0\omega_0}{k}\sin(\omega_0\tau) \Rightarrow$ on peut éliminer $\varphi$ entre les 2 relations :

$$A^2 = \left(\frac{F_0}{k}\right)^2 \times [1 - 2\cos\omega_0\tau + \cos^2(\omega_0\tau) + \sin^2(\omega_0\tau)] = 2\left(\frac{F_0}{k}\right)^2 \times (1-\cos\omega_0\tau) = 4\left(\frac{F_0}{k}\right)^2 \times \sin^2\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{2F_0}{k} \times \left|\sin\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right)\right|}$$

2) On voit que $A$ est maximum (pour la 1ère fois après t=0) lorsque : $\dfrac{\omega_0\tau}{2} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\tau = \dfrac{\pi}{\omega_0} = \dfrac{T_0}{2}}$

**Rq :** d'après la relation (1), il s'agit bien de la valeur de $\tau$ pour laquelle $x(\tau) = \dfrac{2F_0}{k} = x_{\max} \Rightarrow$ pour « optimiser » le lancement, il faut, logiquement, arrêter d'exercer la force de traction au moment où l'élongation de M est maximum.